



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

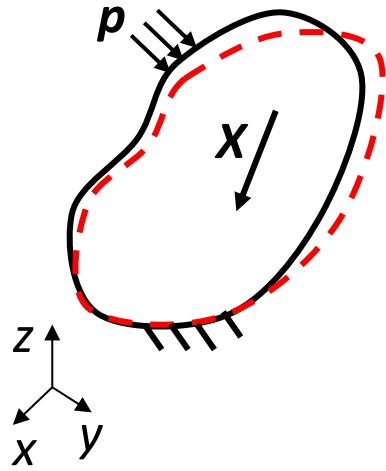


Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 1. Przybliżone metody numeryczne

02.2025

Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych



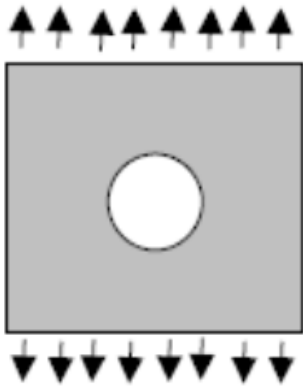
Konstrukcje odkształcalne mogą być badane:

- metodami doświadczalnymi (*koszt i czasochłonność*)
- metodami teoretycznymi:
 - analitycznymi (*tylko proste modele*)
 - numerycznymi (*metody przybliżone*) – MRS, MEB, MES

Metoda różnic skończonych (MRS)

Metoda elementów brzegowych (MEB)

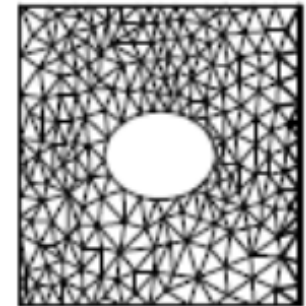
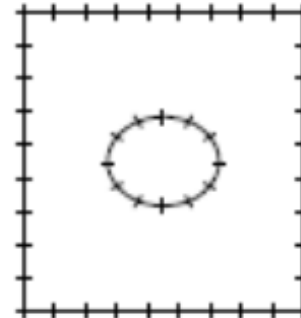
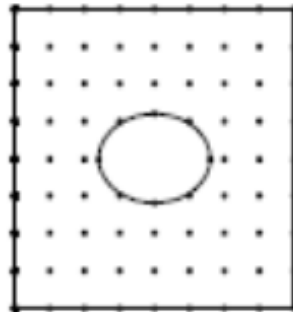
Metoda elementów skończonych (MES)



Równania różniczkowe cząstkowe

Całkowe równania brzegowe

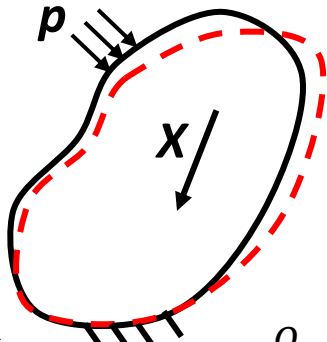
Minimalizacja funkcjonału



W metodach przybliżonych problem poszukiwania nieznanymi funkcji (np. opisujących pole przemieszczeń) zastępowany jest przez problem poszukiwania skończonej liczby parametrów.

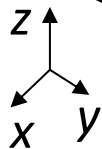
Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji przedstawiana jest zwykle jako metoda przybliżona, wykorzystująca twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej układu odkształcalnego.



Całkowita energia potencjalna układu odkształcalnego:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} X_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} p_i u_i d\Gamma$$



Ω – obszar, Γ – brzeg,
 σ_{ij} – tensor naprężenia,
 ε_{ij} – tensor odkształcenia

u_i – wektor przemieszczenia,
 p_i – obciążenie powierzchniowe,
 X_i – siły masowe

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej mówi, że:

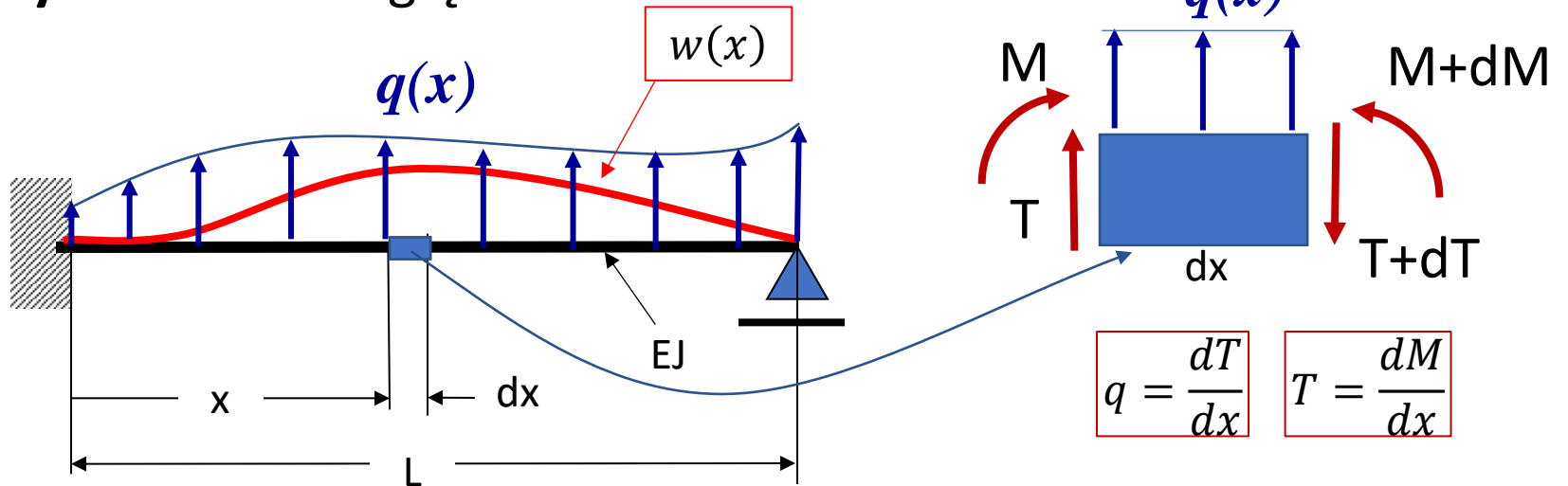
Ze wszystkich geometrycznie dopuszczalnych postaci przemieszczeń, którym może podlegać ustrój sprężysty, wystąpi ta, dla której funkcjonal całkowitej energii potencjalnej osiągnie wartość minimalną.

$$V = U - W = \min !$$

V – funkcjonal (poszukiwanej funkcji $u(\bar{x})$ przypisuje liczbę)

Minimalizacja funkcjonału jest zadaniem rachunku wariacyjnego

Przykład 1: linia ugięcia belki



$$q = \frac{dT}{dx} \quad T = \frac{dM}{dx}$$

Warunki brzegowe: $w(x=0) = 0$ $w(x=L) = 0$ $\frac{dw}{dx}(x=0) = 0$

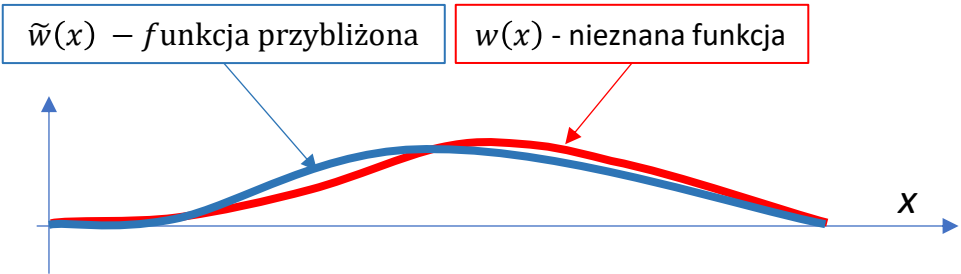
Równanie różniczkowe

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x)$$

lub

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (w'')^2 dx - \int_0^L q(x)w(x) dx = \min$$



$\tilde{w}(x)$ – funkcja przybliżona

$w(x)$ - nieznana funkcja

Funkcja przybliżona (aproxymująca):

$$\tilde{w}(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x)$$

Aproxymacja: parametryczna lub węzłowa globalna lub lokalna

Metoda Ritza

Wprowadźmy funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x)$$

(może to być szereg potęgowy lub Fouriera)

Funkcja aproksymująca jest kombinacją liniową nieznanymi parametrów a_i i znanych funkcji geometrycznie dopuszczalnych $g_i(x)$

Po podstawieniu tej funkcji do wyrażenia na całkowitą energię potencjalną otrzymamy funkcję parametrów a_i :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (\tilde{w}''')^2 dx - \int_0^L q(x) \tilde{w}(x) dx$$



$$V = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

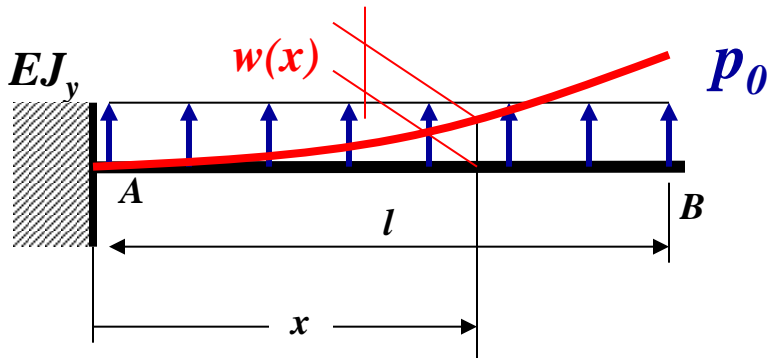
Teraz należy znaleźć minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0$$

To jest układ n -równań algebraicznych liniowych



Przykład 2: belka wspornikowa



Rozwiąż metodą Ritza belkę wspornikową używając daną funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3$$

Warunki brzegowe: $\tilde{w}(x=0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$ $\tilde{w}'(x=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

Aby funkcja spełniała warunki geometryczne:

$$\tilde{w}(x) = a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \rightarrow \tilde{w}'(x) = 2a_3 \cdot x + 3a_4 \cdot x^2 \rightarrow \tilde{w}''(x) = 2a_3 + 6a_4 \cdot x$$

Energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot w(x) dx$$

Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot \tilde{w}(x) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3 a_4 x + 36a_4^2 x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3a_4x + 36a_4^2x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3x^2 + a_4x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2x + 12a_3a_4x^2 + 12a_4^2x^3) \Big|_0^l - p_0 \left(\frac{1}{3}a_3x^3 + \frac{1}{4}a_4x^4 \right) \Big|_0^l$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2l + 12a_3a_4l^2 + 12a_4^2l^3) - p_0 \left(\frac{1}{3}a_3l^3 + \frac{1}{4}a_4l^4 \right)$$

Warunek minimum funkcji:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_3} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{EJ}{2} (8la_3 + 12l^2a_4) - \frac{1}{3} p_0 l^3 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{EJ}{2} (12l^2a_3 + 24l^3a_4) - \frac{1}{4} p_0 l^4 = 0$$

$$a_3 = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y}$$

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przybliżenie momentu gnącego:

$$\tilde{M}_g = EJ_y \tilde{w}''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T} = EJ_y \tilde{w}'''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

Rozwiązanie przybliżone:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

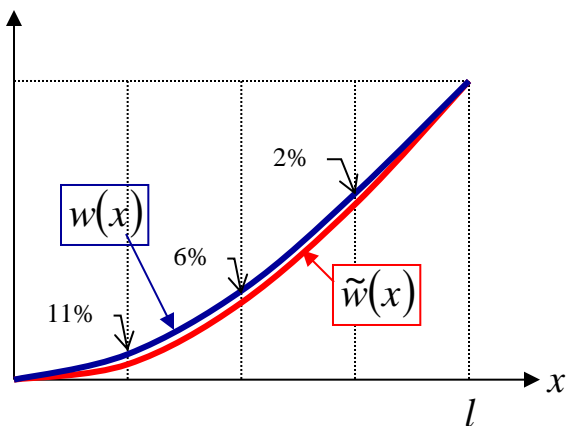
$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$



$$\tilde{w}(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.082 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.042 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

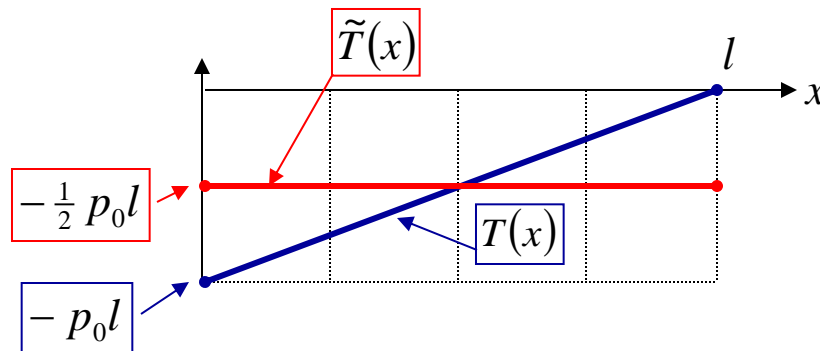
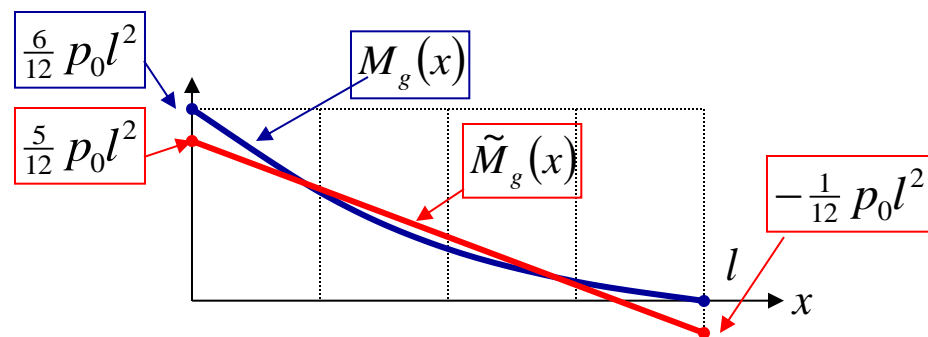
$$\tilde{w}\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.012 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

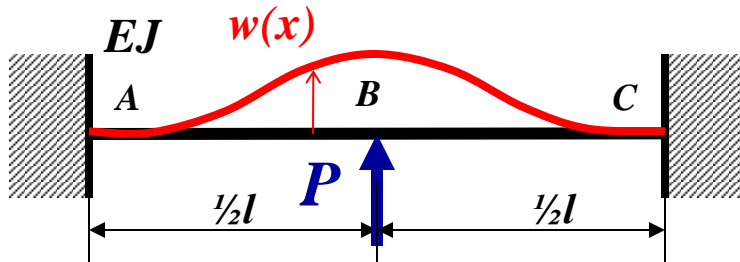
$$w\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.084 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.044 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.013 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$



Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona



Rozwiąż metodą Ritza belkę statycznie niewyznaczalną używając daną funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\tilde{w}'(x) = \frac{2\pi}{l} A \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{w}''(x) = \frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Warunki brzegowe: $\tilde{w}(x=0) = 0$ $\tilde{w}'(x=0) = 0$ $\tilde{w}(x=l) = 0$ $\tilde{w}'(x=l) = 0$

Funkcja spełniała warunki geometryczne!

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - P \cdot w\left(\frac{1}{2}l\right)$$

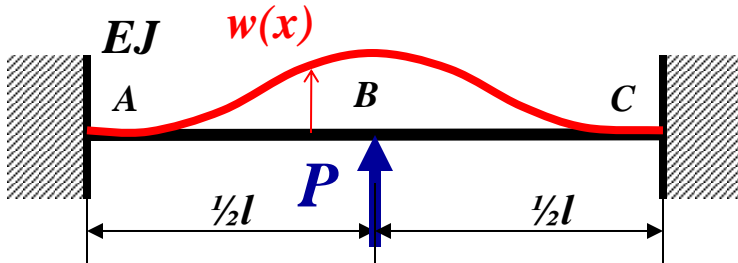
Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - P \cdot \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \right)^2 dx - P \cdot A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}l}{l}\right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona (c.d.)



$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} A^2 - 2P \cdot A$$

Warunek minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{8\pi^4 EJ}{l^3} A - 2P = 0$$

$$A = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ}$$

Funkcja przybliżona opisująca linię ugięcia:

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

Przybliżenie momentu gnącego:

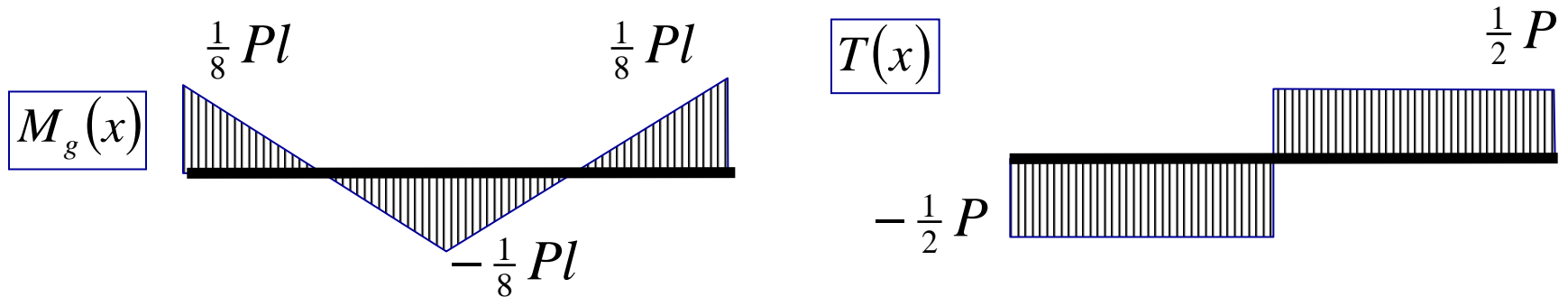
$$\tilde{M}_g(x) = EJ \cdot \tilde{w}''(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T}(x) = EJ \cdot \tilde{w}'''(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona (c.d.)

Rozwiązanie ścisłe (*metodą M-M*):

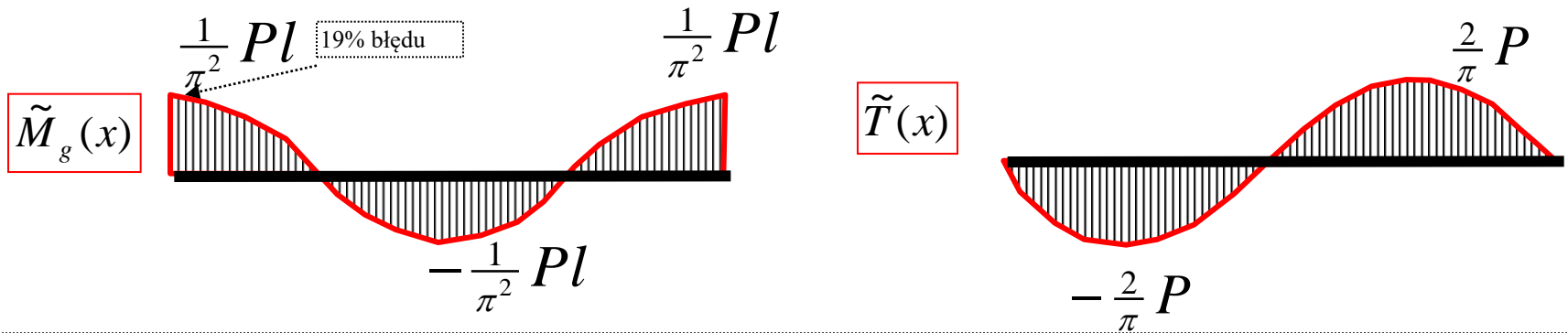


Rozwiązanie przybliżone (*metodą Ritz'a*):

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

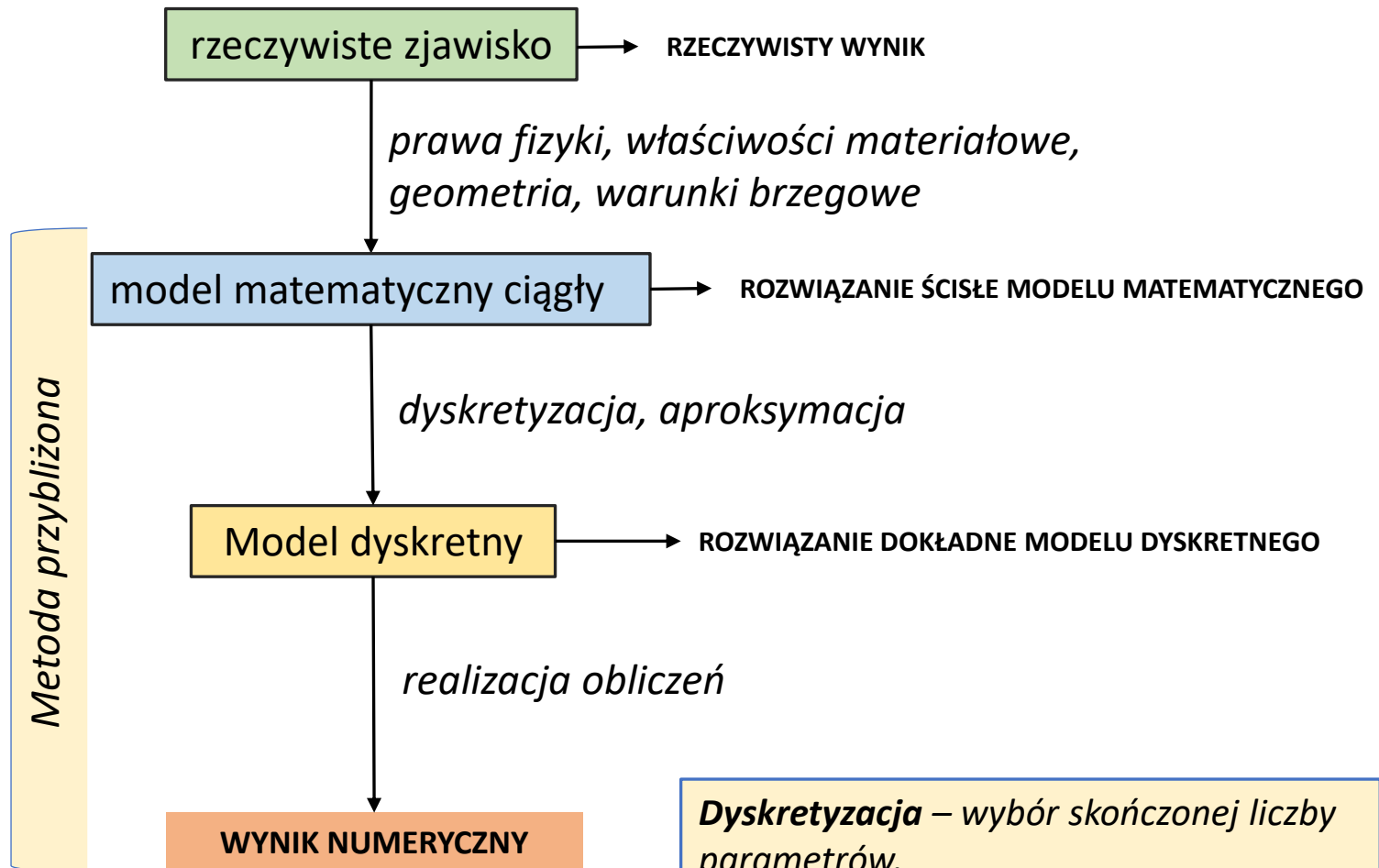


$$\tilde{w}_{extr} = \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{2\pi^4 EJ} = -0.005133 \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$w_{extr} = w\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{192 EJ} = -0.005208 \frac{Pl^3}{EJ}$$

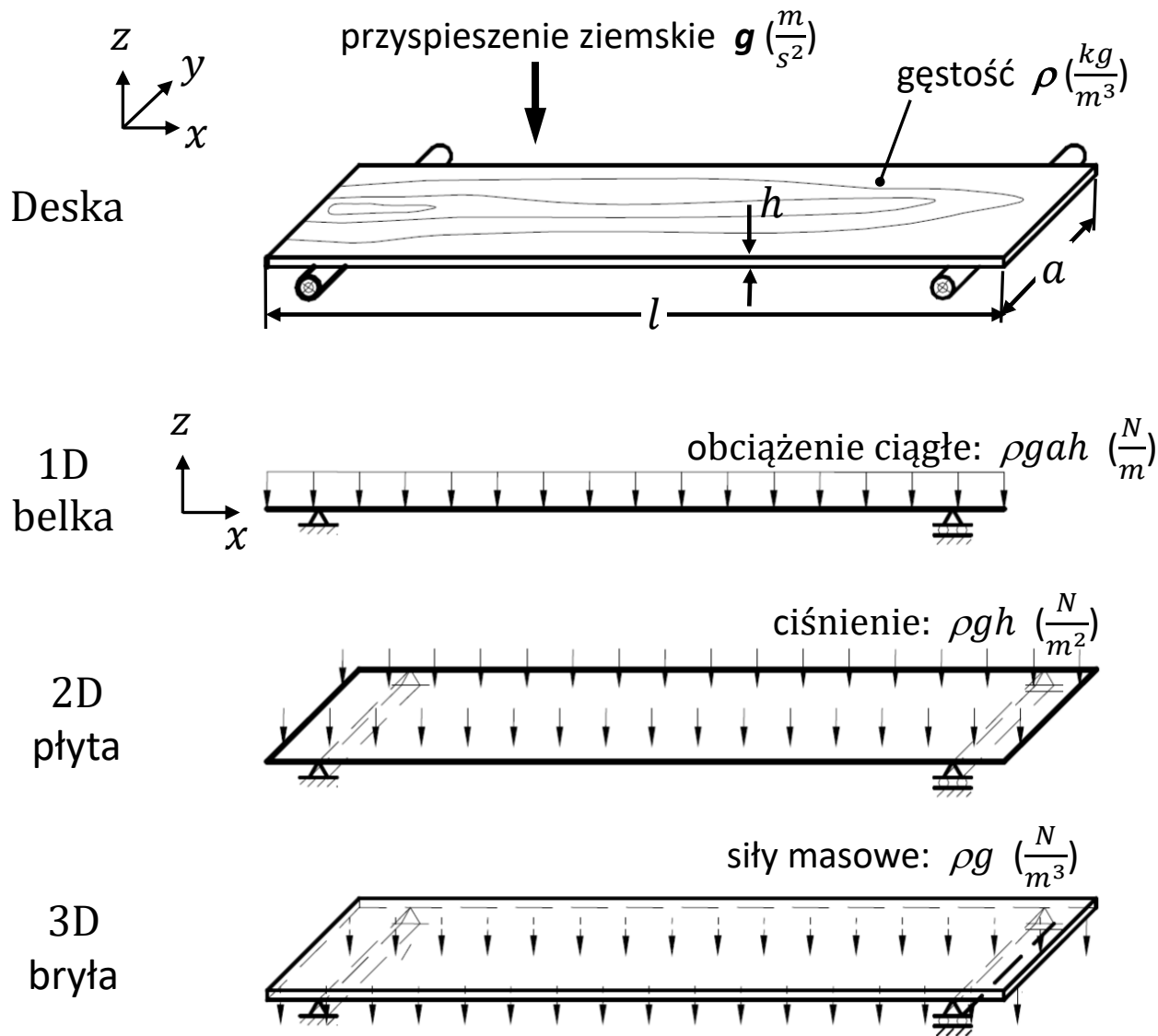
1.5% błędu

Rozwiązanie zagadnienia analizy ośrodków ciągłych metodą przybliżoną



Dyskretyzacja – wybór skończonej liczby parametrów,
Aproksymacja – sposób opisu za pomocą z góry założonych prostych funkcji zależnych od poszukiwanych parametrów

Wybór modelu matematycznego



Założenia:

Własności materiału:

- *izotropowe,*
- *anizotropowe,*
- *lepkosprężyste,*

Duże ugięcia

Warunki brzegowe (kontakt)

Nie ma jednego
dobrego modelu!

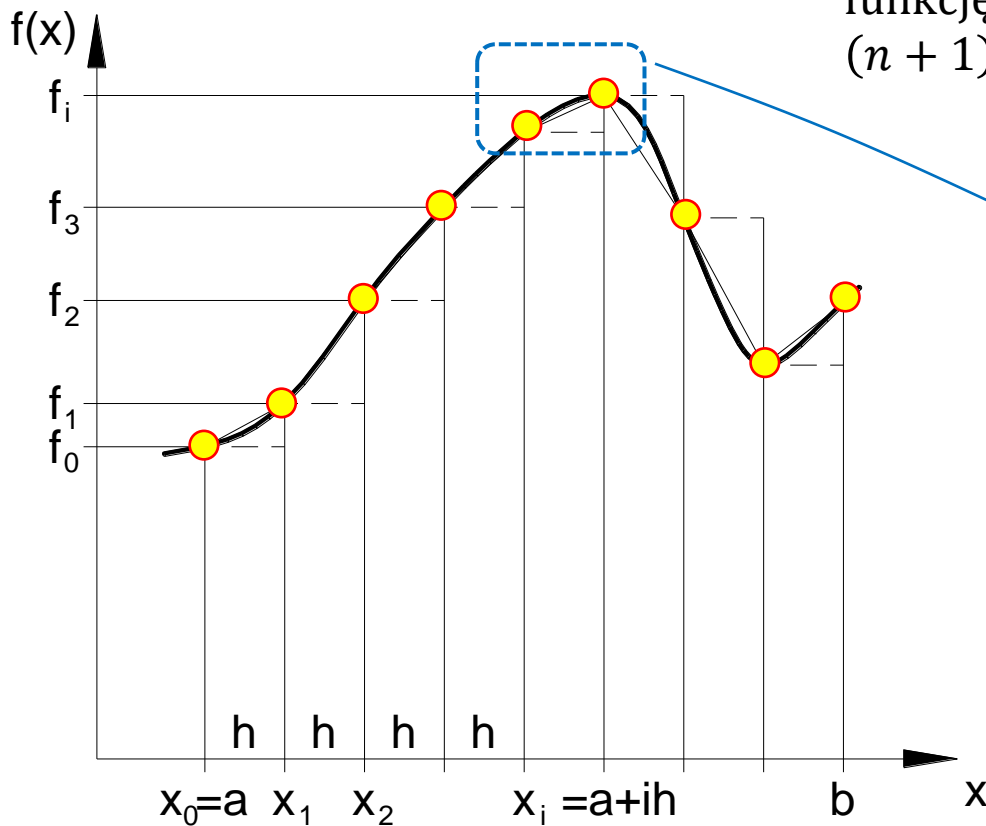
Właściwy model zależy od:

- *celu analizy,*
- *wymagań stawianych konstrukcji,*
- *żądanej dokładności wyników,*
- *dostępności danych materiałowych,*
- *dostępnych narzędzi obliczeniowych*

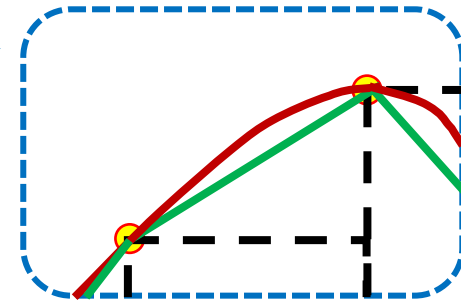
Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

dowolna funkcja: $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości: $h = (b - a)/n$



funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentuje zbiór $(n + 1)$ wartości: $f(a + ih), i = 0, 1, 2, n$

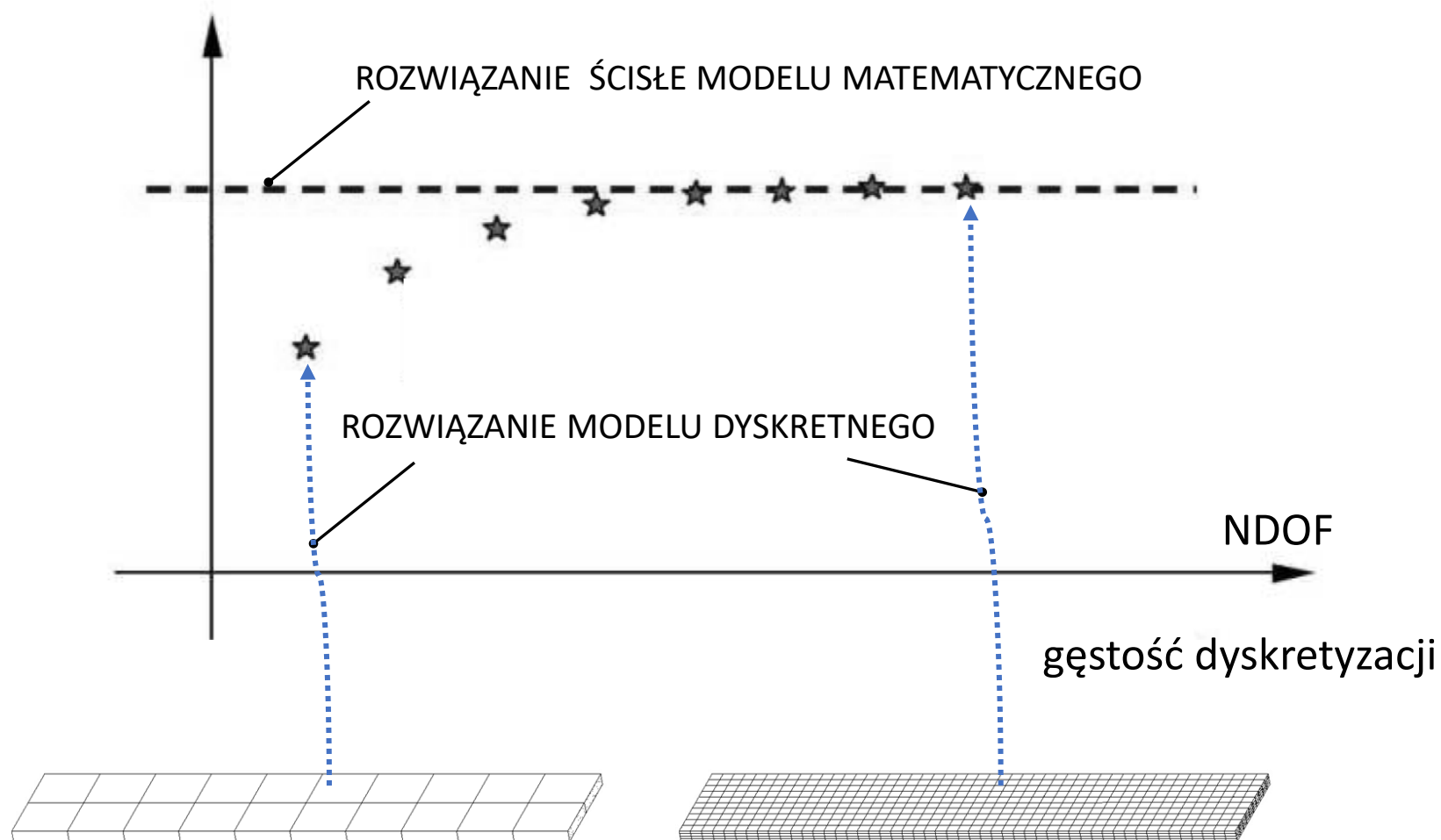


Aproksymacja może być:

- stała (schodkowa),
- liniowa (tamana),
- funkcjami sklejanymi.

Wpływ dyskretyzacji na jakość rozwiązania

Model dyskretny



Przedstawienie metod przybliżonych na przykładzie r-nia Poissona

Równanie Poissona opisuje wiele zjawisk o dużym znaczeniu w technice:

- *Stacjonarny przepływ ciepła,*
- *Stacjonarny bezwirowy przepływ nieściśliwej i nielepkiej cieczy,*
- *Proste pola magnetyczne i elektryczne,*
- *Rozkład naprężenia w przekroju pręta skręcanego (TS)*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0,$$

$$T(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

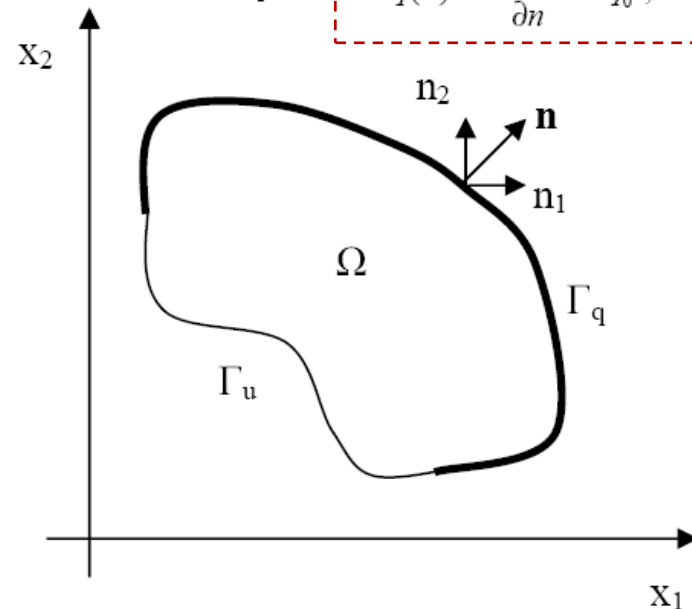
$$q(x) = \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0$$

Rozważmy warunki brzegowe:

$$u(\bar{x}) = u_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u \quad \text{- Dirichleta na } \Gamma_u$$

$$q(x) = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q \quad \text{- Neumanna na } \Gamma_q$$



Gdzie u_0 i q_0 są danymi funkcjami określonymi na odpowiednich częściach brzegu.

W szczególnych przypadkach (*prosta geometria i warunki brzegowe*) zadanie ma swoje analityczne rozwiązanie.

Metoda różnic skończonych (MRS)

MRS przybliża rozwiązanie równania różniczkowego za pomocą zastępowania operatorów różniczkowych **operatorami różnicowymi**:

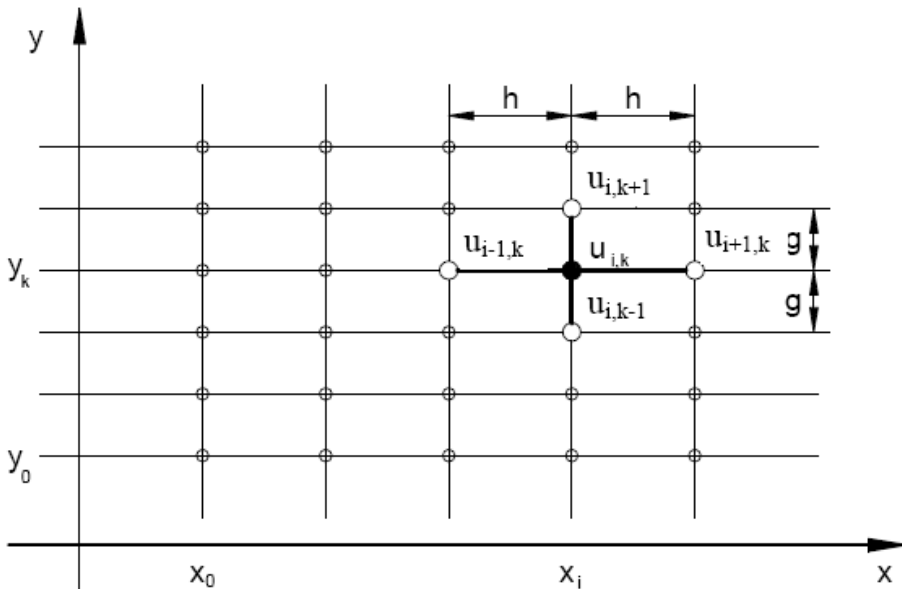
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \longrightarrow \quad \boxed{f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Dyskretyzacja polega na zastąpieniu poszukiwanej funkcji przez zbiór jej wartości w węzłach siatki (regularnej lub nieregularnej).

Wartości pochodnych w punkcie zastępowane są za pomocą przyrostów (różnic) funkcji w sąsiadujących węzłach.

Równania różniczkowe zastępowane są przez równania algebraiczne tzw. równania różnicowe

Otrzymujemy układ równań algebraicznych z niewiadomymi będącymi wartościami funkcji w węzłach.

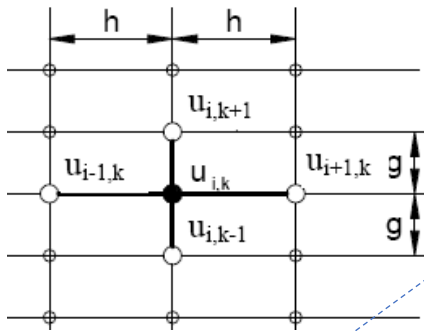


Dla siatki prostokątnej: $x_i = x_0 + ih,$ $u_{i,k} = u(x_i, y_k)$
 $y_k = y_0 + kg,$

Można przyjąć różne schematy różnicowe:

- a) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{g},$ **Iloraz różnicowy przedni**
- b) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{g},$ **Iloraz różnicowy tylny**
- c) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2g},$ **Iloraz różnicowy centralny**

Metoda różnic skończonych (MRS)



Różnice odpowiadające wyższym pochodnym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{\Delta^4 u}{\Delta x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2} = \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{g^2}.$$

Za pomocą schematu różnicowego możemy wyrazić równanie różniczkowe w dowolnym punkcie (x_i, y_j) za pomocą równania algebraicznego w przypadku równania Poissona:

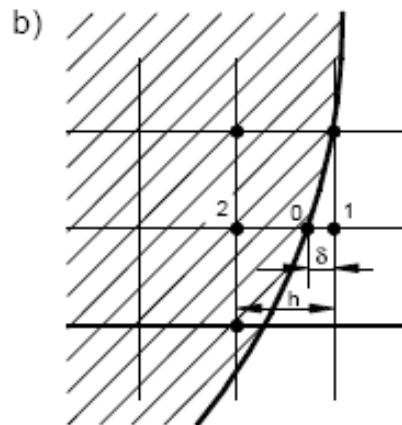
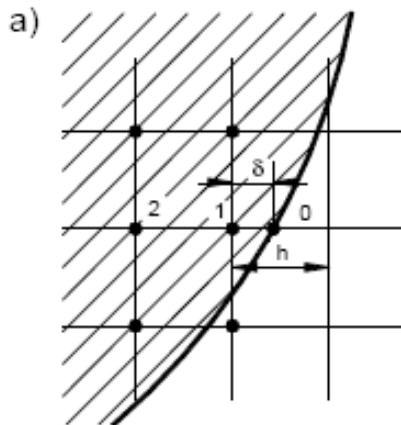
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{g^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + f(x_i, y_j) = 0.$$

Dla siatki regularnej ($h=g$) i $f=0$ (równanie Laplace'a) mamy:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}.$$

N węzłów w obszarze Ω , N równań, N niewiadomych (każde równanie odpowiada jednemu węzłowi siatki)

$$[A] \{u\} = \{b\}$$



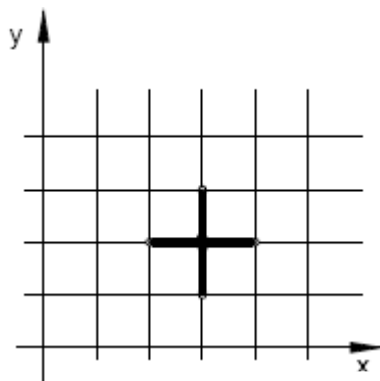
W przypadku nieregularnych kształtów brzegu:

- a) zakładamy $u_1 = \frac{hu_0 + \delta u_2}{h + \delta}$ zamiast $u = u_0$
- b) zakładamy $u_1 = \frac{hu_0 - \delta u_2}{h - \delta}$ zamiast $u = u_0$

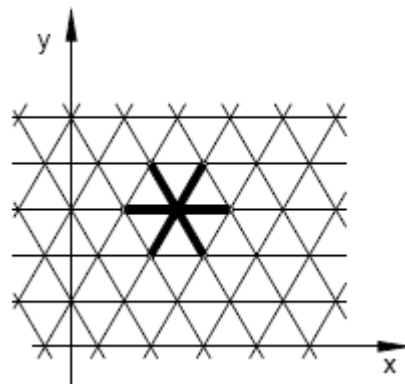
Interpolacja warunku brzegowego

ekstrapolacja warunku brzegowego

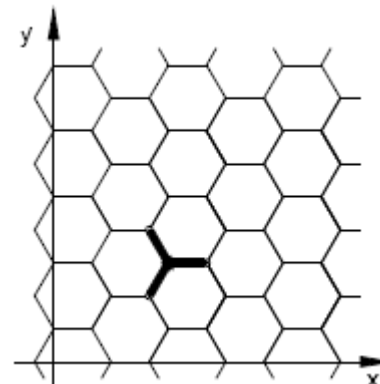
Przykłady siatek nieregularnych w MRS



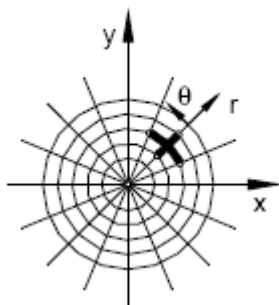
Siatka kwadratowa



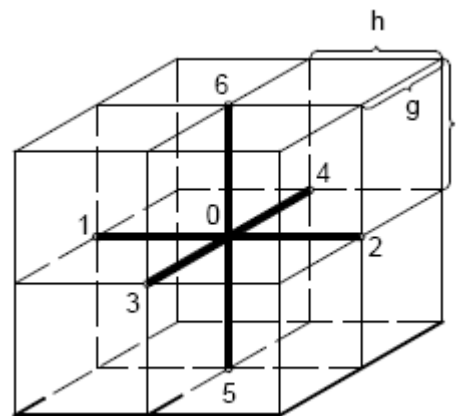
Siatka trójkątna



Siatka sześciokątna



Siatka w układzie biegunowym



Siatka prostopadłościenna

Metoda elementów brzegowych (MEB)

Dla punktu źródłowego można przedstawić brzegowe równanie całkowe, które stanowi sformułowanie równoważne dla zagadnienia Poissona:

$$c(\bar{\xi})u(\bar{\xi}) = \int_{\Gamma} u(x)q^*(\bar{\xi}, \bar{x})d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{n}} u^*(\bar{\xi}, \bar{x})d\Gamma(\bar{x}) + \int_{\Omega} f(x)u^*(\bar{\xi}, \bar{x})dR(\bar{x})$$

Funkcje u^* i q^* zależą od położenia dwóch punktów: $\bar{\xi}$ - punkt źródłowy, \bar{x} - punkt obserwacyjny

$c(\bar{\xi})$ - Współczynnik równy $\frac{1}{2}$ na gładkim konturze lub 1 wewnątrz obszaru Ω

Rozwiązanie fundamentalne (znane w teorii r-ń całkowych):

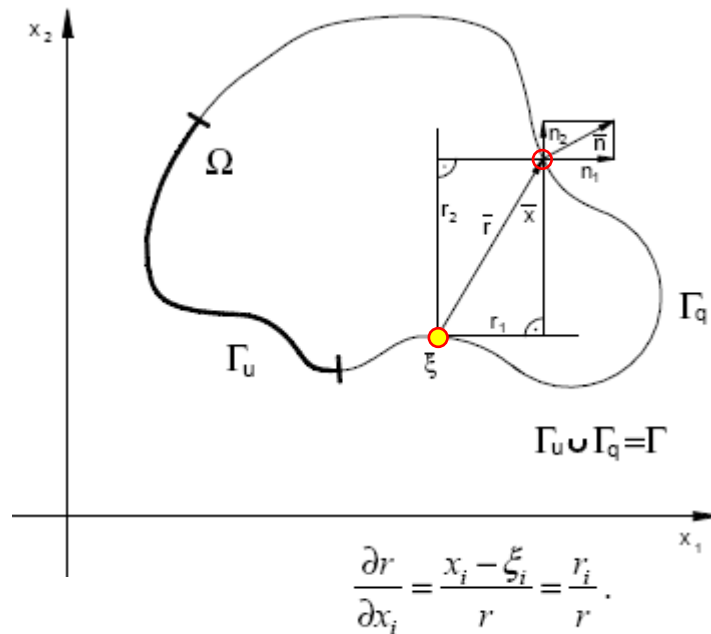
$$u^* = (\bar{\xi}, \bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$$

Funkcja q^* określona jest przez pochodną kierunkową u^* :

$$q^*(\bar{\xi}, \bar{x}) = \frac{\partial u^*(\bar{\xi}, \bar{x})}{\partial n}$$

Dokonując różniczkowania, otrzymujemy:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \cdot n_2, \quad q^* = \frac{-(r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2)}{2\pi r^2}$$



Gdzie: $r_i = x_i - \xi_i, i = 1, 2, \quad \bar{n} = n_1, n_2$ jest jednostkowym wektorem zewnętrznym, normalnym do brzegu Γ

Brzegowe równanie całkowe wiąże ze sobą niezależną funkcję $u(\bar{x})$ i jej pochodną normalną $q(\bar{x}) = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{n}}$ na brzegu Γ .

Metoda elementów brzegowych (MEB)

1. Brzeg dzielimy na LE elementów

2. Na każdym elemencie brzegowym aproksymujemy funkcje $u(\bar{x})$ i $q(\bar{x})$

(np.: $u(P_i)$ i $q(P_i)$ stałe na elementach brzegowych)

3. Przekształcamy równanie całkowe dla każdego węzła $\bar{\xi}$ w algebraiczne równanie liniowe

$$\frac{1}{2}u(P_i) = \sum_{j=1}^{LE} \int_{\Gamma_j} u^*(P_i, \bar{x}) q(P_j) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{LE} \int_{\Gamma_j} q^*(P_i, \bar{x}) u(P_j) d\Gamma_j + \int_{\Omega} f(\bar{x}) u^*(P_i, \bar{x}) dR$$

$i = 1, 2, \dots, LE$

po numerycznym scałkowaniu dla każdego punktu węzłowego

$$\frac{1}{2}u(P_i) = \sum_{j=1}^{LE} U_{ij}^* \cdot q(P_j) - \sum_{j=1}^{LE} Q_{ij}^* \cdot u(P_j) + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, LE. \quad f_i = \int_{\Omega} f(\bar{x}) u^*(P_i, \bar{x}) d\Omega(\bar{x})$$

LE liniowych równań z niewiadomymi: $u(P_i)$ (jeśli punkt $P_j \in \Gamma_q$) lub $q(P_i)$ (jeśli $P_i \in \Gamma_u$)

$$\frac{1}{2}\{u\} = [U^*]\{q\} - [Q^*]\{u\} + \{f\}.$$

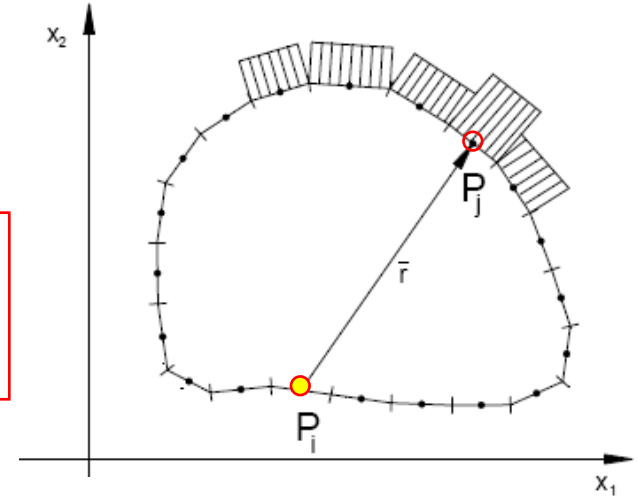
Ostatecznie:

$$[A]\{y\} = \{b\}$$

Rozwiązanie $\{y\}$ przedstawia poszukiwane wartości brzegowe u i q .

Macierz A – pełna i niesymetryczna

4. Rozwiązanie daje pełną informację o funkcji $u(\bar{x})$ i jej pochodnej $q(\bar{x})$ na brzegu



Metoda elementów skończonych (MES)

Równoważne (dla zadania Poissona) zadanie minimalizacji funkcjonału

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} q_0 u d\Gamma,$$

Gdzie funkcja u spełnia warunek Dirichleta:

$$u(\bar{x}) = u_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

1. Dyskretyzacja obszaru rozwiązania Ω na elementy Ω_i , $i = 1, LE$ połączone w węzłach

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{LE} \Omega_e \quad \text{i} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \quad i \neq j,$$

2. Aproksymacja funkcji $u(\bar{x})$ w elemencie skończonym za pomocą funkcji kształtu i nieznanymi parametrów węzłowych u_i

$$u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{LWE} N_i(x_1, x_2) u_i$$

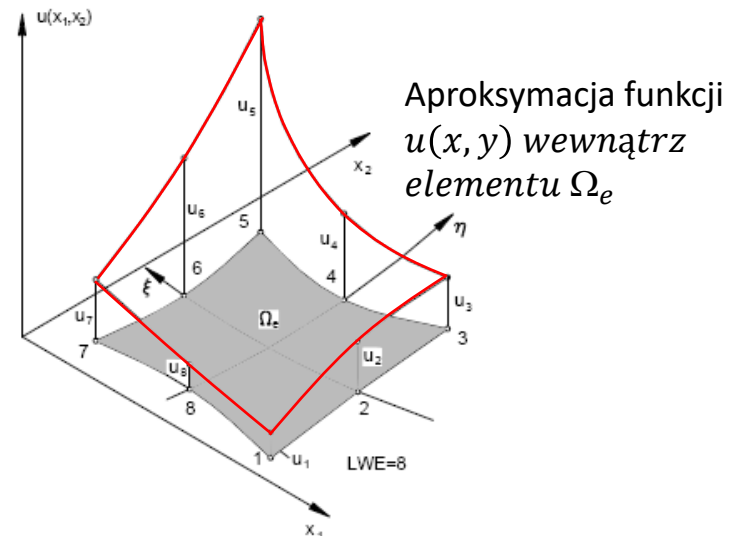
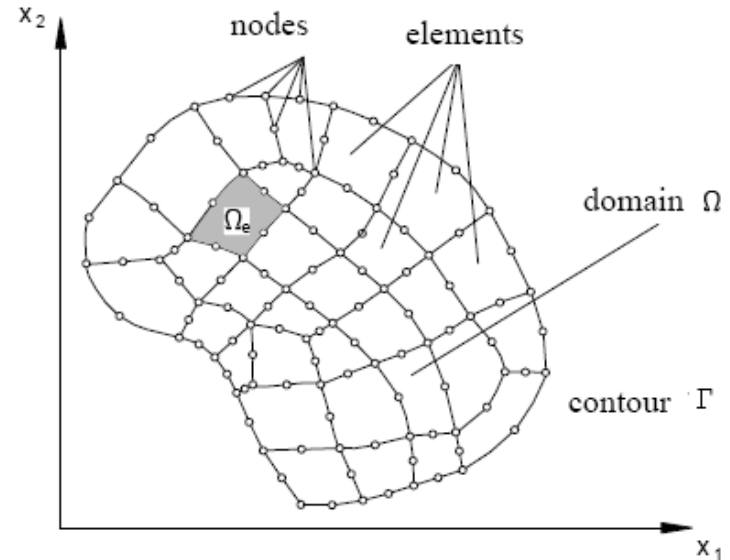
LWE – liczba węzłów w elemencie

u_i , $i=1, \dots, LWE$ – wartości węzłowe poszukiwanej funkcji

$N_i(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu

3. Postać dyskretna funkcjonału

$$I(u) \cong \sum_{i=1}^{LE} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega_i - \sum_{j=1}^{LK} \int_{\Gamma_j} q_0 u d\Gamma_j$$



Metoda elementów skończonych (MES)

Wewnątrz każdego elementu mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i.$$

W ten sposób zastępujemy funkcjonal I za pomocą funkcji wielu zmiennych u_i , $i=1,2,\dots,LW$, gdzie LW oznacza liczbę węzłów. W postaci macierzowej funkcja ta ma postać:

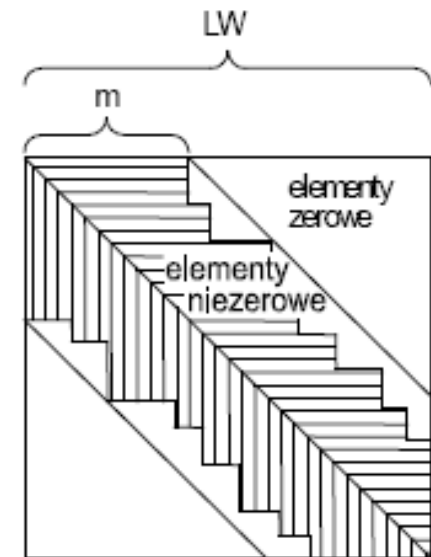
$$I(u) \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{LW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1LW} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ k_{31} & k_{32} & & & \\ \dots & & & & \\ k_{LW1} & & & & k_{LWLW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{LW} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{LW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{LW} \end{Bmatrix}$$

$$I \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}_{1 \times LW} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_{LW \times LW} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{LW \times 1} - \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}_{1 \times LW} \begin{Bmatrix} b \end{Bmatrix}_{LW \times 1}.$$

Warunkiem koniecznym minimum tej funkcji jest zerowanie się wszystkich pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, LW.$$

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \end{Bmatrix}, \quad (+ \text{Dirichlet b.c.})$$

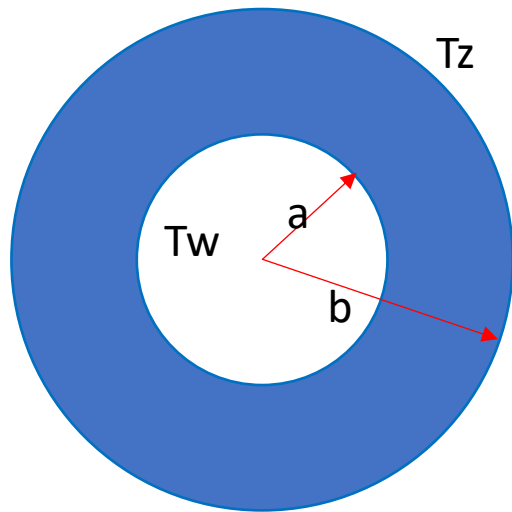


Układ równań algebraicznych liniowych z nieznanymi wartościami węzłowymi poszukiwanej funkcji

Przykład 4: Stacjonarny przepływ ciepła w rurze

Stalowa grubościenna rura ma temperaturę wewnętrzną $T_w=100^\circ\text{C}$ a temperaturę zewnętrzną $T_z=20^\circ\text{C}$. Promień wewnętrzny rury $a=30\text{mm}$, zewnętrzny $b=40\text{mm}$. Obliczyć rozkład temperatury.

Dane: $\lambda=50\text{W/mK}$.



Równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0$$



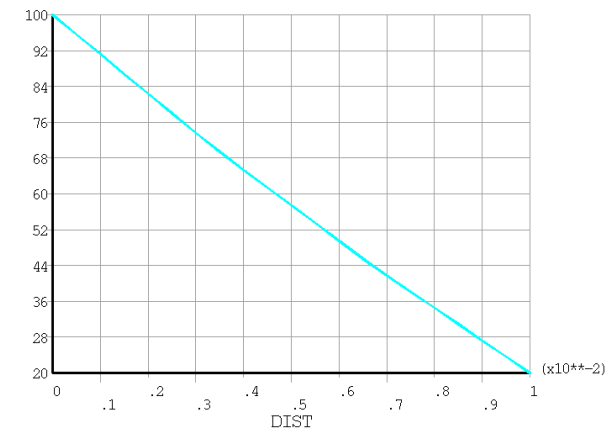
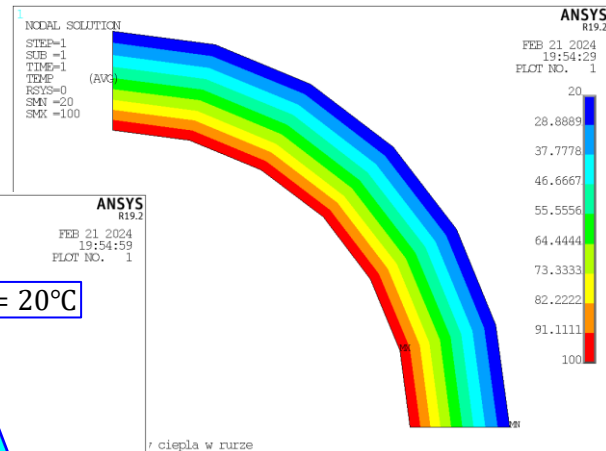
Rozwiązanie analityczne:

$$T(r) = T_w + \frac{T_z - T_w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

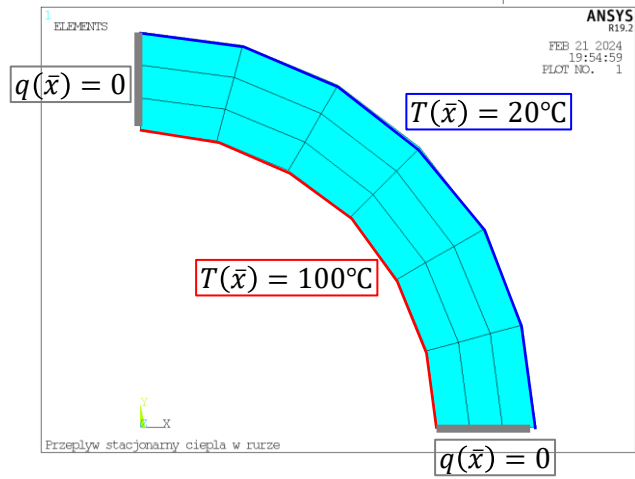
$$T(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

$$q(x) = \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q$$

Rozkład temperatury:



Model MES:



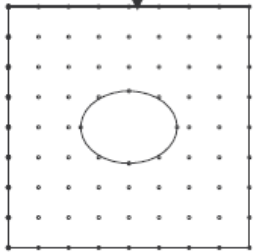
PL4

Ogólny schemat postępowania przy obliczeniach:

Metodą Różnic skończonych

Równania różniczkowe cząstkowe

Budowa siatki węzłów i przyjęcie
wybranych schematów
różnicowych



Zastąpienie równań różniczkowych
przez równania różnicowe dla
kolejnych węzłów obszaru.
Formowanie układu równań liniowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

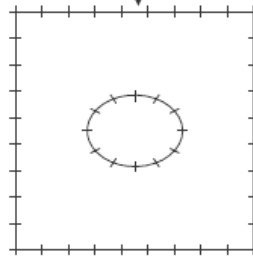
Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz rzadka, pasmowa, zwykle
symetryczna)

Obliczenia uzupełniające, np.
pochodnych poszukiwanych funkcji w
węzłach

Metodą elementów brzegowych

Całkowe równania brzegowe

Podział brzegu na segmenty
(elementy brzegowe)
i założenie odpow. funkcji aproksym.
na elementach (funkcji kształtu)
W niektórych przypadkach pomocnicza
dyskretyzacja obszaru



Budowa dyskretnej reprezentacji
równania całkowego
dla kolejnych węzłów brzegu.
Formowanie układu równań liniowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

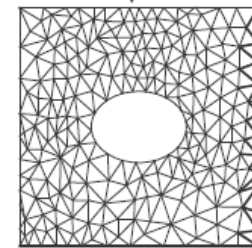
Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz pełna, niesymetryczna)

Obliczenia uzupełniające, np.
poszukiwanych funkcji i ich
pochodnych w wybr. punkt. obszaru

Metodą elementów skończonych

Problem minimalizacji funkcjonału

Podział obszaru na małe podobszary
(elementy skończone)
i przyjęcie odpowiednich funkcji
aproksymujących na elementach
(funkcji kształtu)



Budowa macierzy sztywności
kolejnych elementów.
Formowanie układu równań liniowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz rzadka, pasmowa, zwykle
symetryczna)

Obliczenia uzupełniające, np.
funkcji i jej pochodnych funkcji wewnątrz
elementów skończonych

MES jako metoda przybliżona

Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną, którą można wykorzystać jako procedurę numeryczną do rozwiązywania problemów fizycznych, w tym:

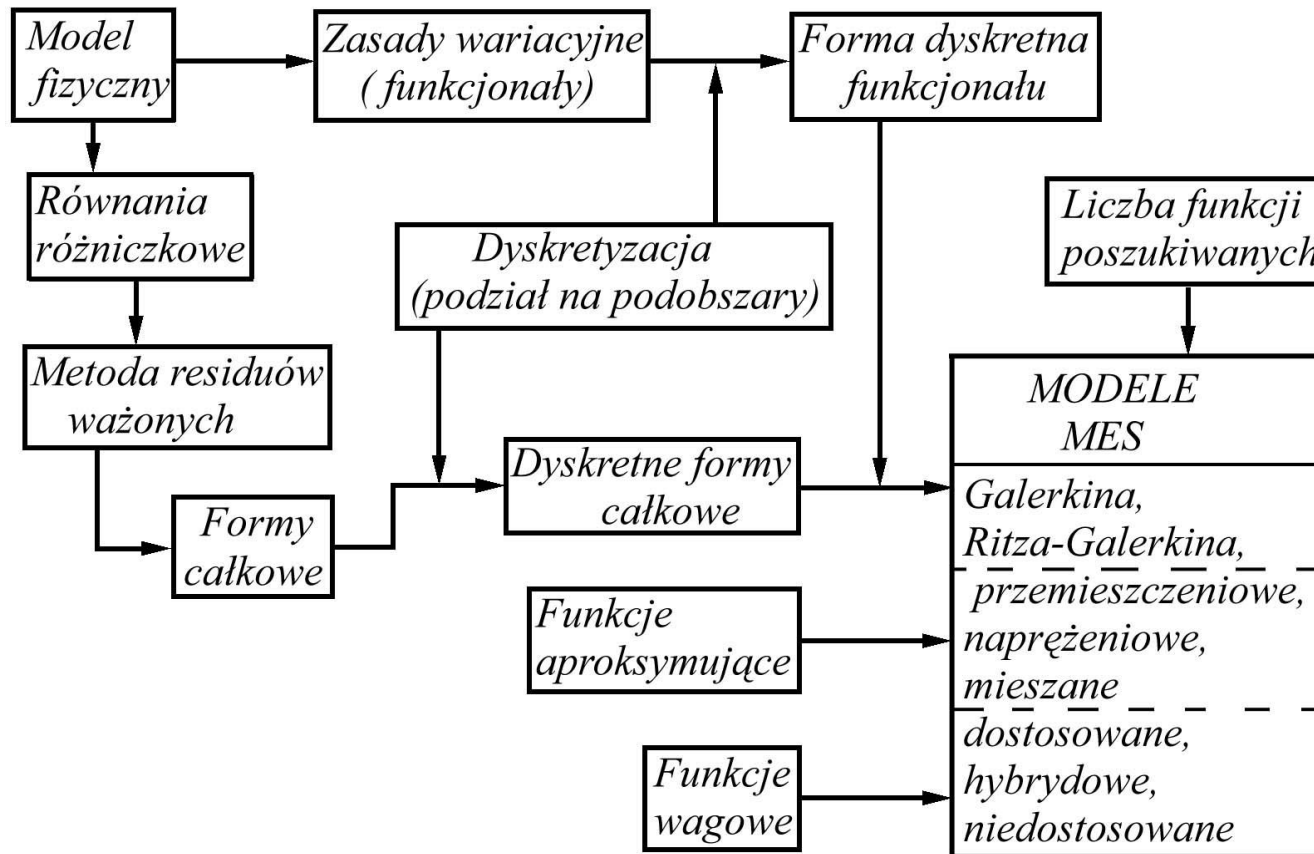
- mechaniki ciała stałego,
- wymiany ciepła,
- przepływu cieczy,
- elektromagnetyzmu,
- zagadnienia pól sprzężonych
- ...

MES został opracowany w latach 50 XX wieku w celu rozwiązywania problemów dla przemysłu cywilnego i lotniczego. Metoda stała się najpotężniejszym narzędziem analitycznym, głównie dzięki rozwojowi komputerów.

Celem wykładu jest dostarczenie podstawowej wiedzy i umiejętności potrzebnych do zrozumienia i zastosowania MES do rozwiązywania problemów brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych

Modele MES w mechanice konstrukcji

W metodzie elementów skończonych wyróżnia się modele przemieszeniowe, naprężeniowe i mieszane, w zależności od charakteru poszukiwanych niewiadomych. Poszczególne modele metody elementów skończonych:



Elementy rachunku macierzowego

Przedstawione poniżej informacje stanowią krótkie przypomnienie elementów rachunku macierzowego niezbędne dla zrozumienia podstaw metody elementów skończonych.

Macierzą prostokątną $[a_{ik}]$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze zmiennych naturalnych (i, k) , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_{ik} . Macierz zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej mającej m wierszy i n kolumn:

$$[A]_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

W przypadku, gdy $m = n$ macierz nazywamy kwadratową.

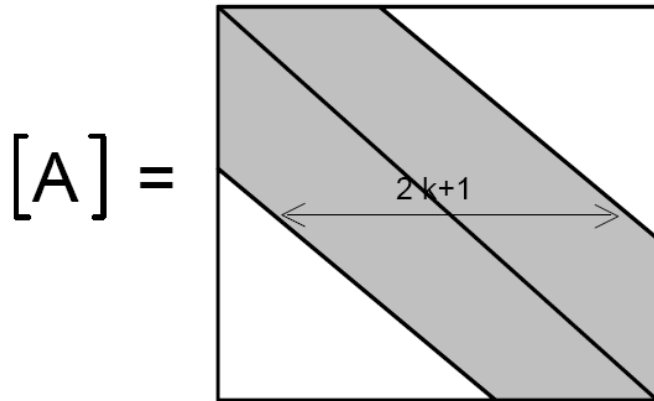
Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza leżącymi na głównej przekątnej (diagonali) są równe zero ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Macierz $[A]_{m \times 1}$ nazywać będziemy wektorem-kolumną i oznaczać $\{A\} = \{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Macierz $[A]_{1 \times n}$ nazywać będziemy wektorem-wierszem i oznaczać $[A] = [a_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Elementy rachunku macierzowego

Macierzą pasmową nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe elementy leżą na przekątnej głównej (diagonali) i w k równoległych do diagonali liniach z każdej strony ($a_{ij} = 0$ jeśli $|i - j| > k$). $(2k + 1)$ – szerokością pasma macierzy $[A]$



Macierzą jednostkową o wymiarze n

nazywamy macierz diagonalną o jednostkowych elementach niezerowych

$$[I] = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ik} = 1 \text{ gdy } i = k, \delta_{ik} = 0, \text{ gdy } i \neq k.$$

Macierzą transponowaną macierzy $[A] = [a_{ik}]$ nazywamy macierz $[A]^T = [a_{ki}]$ powstałą

przez przestawienie wierszy i kolumn. W szczególności mamy $[q]^T = \{q\}$ i $\{q\}^T = [q]$.

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, dla której $[A]^T = [A]$ ($a_{ik} = a_{ki}$).

Podstawowe działania na macierzach

Sumą macierzy $[A] = [a_{ik}]$ i $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [a_{ik} + b_{ik}]$.

Operacja dodawania macierzy wymaga zgodności wymiarów macierzy składowych.

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz $[B] = [\lambda a_{ik}]$

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez macierz $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [c_{ik}]$

taką, że:

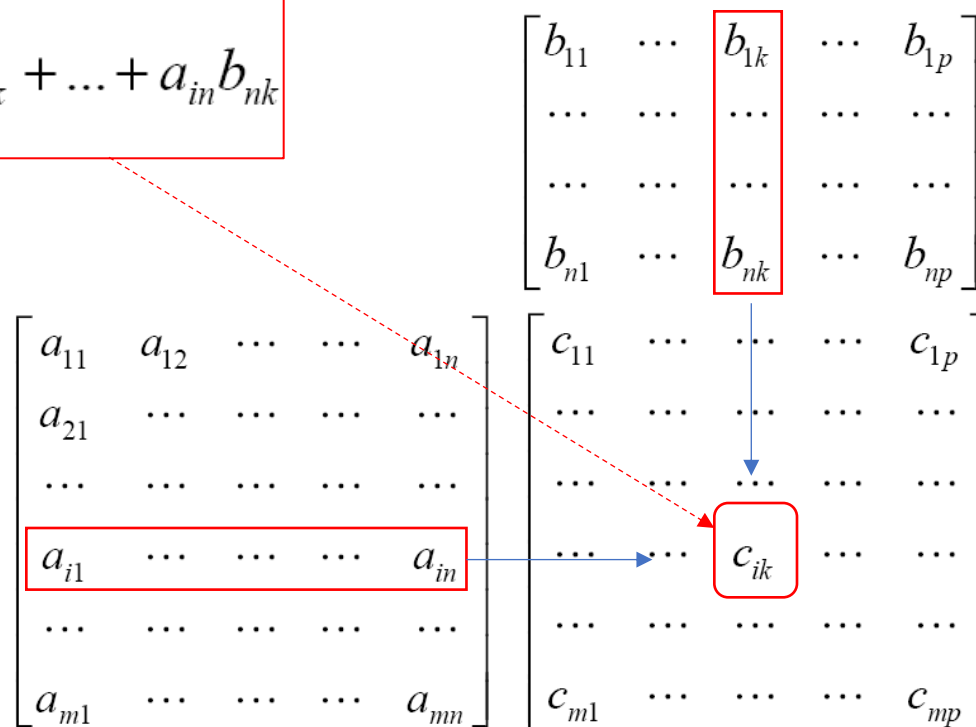
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, p. \end{matrix} \quad (\text{D.3})$$

Mnożenie macierzy jest możliwe jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

Mnożenie macierzy nie jest przemienne ($[A][B] \neq [B][A]$).

Mnożenie macierzy schematem Falka

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$



Wybrane własności działań na macierzach

1. $[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C]$
2. $\alpha[A] \cdot [B] = (\alpha[A]) \cdot [B] = [A] \cdot (\alpha[B])$
3. $([A] \cdot [B])^T = [B]^T [A]^T$

Elementy rachunku macierzowego

Rzędem macierzy A nazywamy największy wymiar podmacierzy kwadratowej powstałej przez wykreślenie części wierszy i kolumn, dla której wyznacznik jest różny od zera. Rzędem macierzy nieosobliwej o wymiarze n jest więc n . Rząd macierzy osobliwej jest mniejszy niż jego wymiar.

Wybrane własności wyznacznika:

1. Jeżeli jakiegokolwiek dwa wiersze (kolumny) są liniowo zależne (dają się przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych) to wartość wyznacznika jest równa zeru.
2. $\det[A] = \det[A]^T$.
3. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
4. $\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$.

Macierz odwrotna. Układ równań liniowych

Macierzą odwrotną nieosobliwej macierzy $[A]$ nazywamy macierz $[A]^{-1}$ taką, że

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I] = [\delta_{ik}].$$

Istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna macierzy nieosobliwej

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} [\alpha_{ik}]^T,$$

gdzie α_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy $[A]$.

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

zapisać można w postaci macierzowej

$$\begin{matrix} [A] & \{x\} & = & \{b\} \\ m \times n & n \times 1 & & m \times 1 \end{matrix}$$

Układ nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania, oznaczonym - gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykłady

PRZYKŁAD 1

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczmy $[A] \cdot [A]^T$.

Według schematu Falka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$$

czyli $[C] = [A] \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$.

Przykłady

PRZYKŁAD 3

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć $[A]^{-1}$.

Wyznaczamy najpierw wartość wyznacznika:

$$\det[A] = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 2 - 1 = 1$$
$$\det[A] = 1.$$

Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna. Macierz dopełnień algebraicznych jest w tym przypadku równa:

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd $[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} [\alpha_{ik}]^T$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I].$$

Przykłady

sposób zapisu lokalnego wektora parametrów węzłowych

wektor – kolumna

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}_e$$

wektor – wiersz

$$[q]_e = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n,]_e$$